

一类分数阶 RNN 模型的有限时间稳定性*

向红军, 王金华

湘南学院数学与金融学院, 湖南 郴州 423000

摘要: 基于激励函数的 Lipschitz 条件, 研究了一类分数阶 RNNs 神经网络模型平衡点的存在唯一性。结合不等式技巧, 得到了该系统平衡点的有限时间稳定性的一个充分条件, 并给出一个实例说明结果的有效性。

关键词: 递归神经网络; 分数阶; 有限时间稳定性

中图分类号: O175.13 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2021) 03-0174-07

Finite-time-stability of a class of fractional order recurrent neural networks

XIANG Hongjun, WANG Jinhua

College of Mathematics and Finance, Xiangnan University, Chenzhou 423000, China

Abstract: Based on Lipschitz condition of activation functions, a class of fractional-order recurrent neural networks is discussed. Combining with inequality technique, the existence, uniqueness and finite-time-stability of the solutions for this model are studied. An example is given to ensure the main results in the last.

Key words: recurrent neural networks; fractional-order; finite-time-stability

John Hopfield^[1] 在 1982 年引入能量函数, 研究了一类具有固定权值的递归神经网络 (Recurrent Neural Networks, RNNs),

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{u_i}{R_i} + \sum_{j=1}^n w_{ij} f_j(u_j) + I_i$$

的稳定性并付诸电路实现。由于 RNNs 在信号处理、联想记忆、优化与控制、人工智能等诸多领域有着非常重要的应用, 引起全世界大量学者的广泛关注 (参见文献 [2-13] 及其所引文献), 有数据显示该文被引次数已突破 1.8 万次。如文献 [2] 的作者基于全局 Lipschitz 连续激励函数, 研究了一类时滞网络

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t - \tau_j)) + I_i, \quad t \geq 0, \quad x_i(t) = \varphi_i(t), \quad -\tau \leq t \leq 0$$

平衡点的全局指数稳定性。2007 年, 文献 [3] 考虑了一类连续时间的 RNNs

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + I_i,$$

它不要求互连矩阵的对称性, 给出了该模型平衡点稳定的一些充分条件。

2009 年, 李冠军等^[4] 借助于非光滑分析, 研究了时滞 RNN 模型

*收稿日期: 2019-10-31

录用日期: 2020-10-11

网络首发日期: 2020-11-05

基金项目: 国家自然科学基金 (12071395, 11701487); 2020 年度国家级一流本科建设点 (2020)

作者简介: 向红军 (1967 年生), 男; 研究方向: 神经网络; E-mail: hunxhjh67@126.com

通信作者: 王金华 (1968 年生), 女; 研究方向: 分数阶微分差分方程; E-mail: hunwjh@163.com

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} g_j(x_j(t-\tau)) + I_i,$$

得到了一些充分条件确保平衡点是全局渐近稳定的。张建海等^[5]认为大多数RNNs都可以转化为标准神经网络模型(SNNM), 利用SNNM的结论对常见的一类RNNs的鲁棒稳定性进行分析。文献[6]的作者构造一个特殊函数, 分析了一类连续分布时滞RNNs的概周期解。

张际雄等^[7]于2014年考虑了一类时变时滞的递归神经网络

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} g_j(x_j(t-\tau(t))) + I_i.$$

结合Lyapunov函数方法和线性矩阵不等式(LMIs)技巧, 得到全局渐近稳定的两个充分条件。同年, 文献[8]的作者研究了一类随机时滞RNN模型的指数稳定性。

2015年, 邢广霞等^[9]用Wirtinger不等式和倒凸组合法研究了带有时变时滞的RNN的稳定性问题。赵宁等^[10]应用M-矩阵的性质和时滞微分不等式技巧, 于2016年对一类具多比例时滞的RNN模型的全局指数稳定性进行研究。2019年, 文献[11]的作者运用对角(半)稳定矩阵, 构造合适的Lyapunov泛函及时滞微分不等式, 对于一类比例时滞递归神经网络的全局渐近稳定和全局指数稳定进行了探索。文献[12]研究了一类忆阻递归神经网络, 应用数学工具分析了它的稳定性问题。刘凤秋^[13]利用线性矩阵不等式和Lyapunov泛函理论, 研究一类忆阻递归神经网络(MRNNs)平衡点的全局指数稳定性。

1998年, Anastasio^[14]把分数阶微积分引入到神经网络模型, 又引起不少人的研究兴趣, 参见文献[15-17]及所引参考文献。文献[18-19]的作者研究了分数阶微分方程的边值问题, 获得了解的存在唯一性及Ulam稳定性的一些充分条件。而据我们所知, 很少有人研究分数阶RNNs模型。基于上述讨论, 本文主要考虑变系数的时变时滞的分数阶RNNs模型

$$D^\alpha x_i(t) = -c_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij}(t)g_j(x_j(t-\tau)) + I_i(t), \quad (1)$$

其中 $0 < \alpha < 1, i = 1, 2, \dots, n$ 。 $n (\geq 2)$ 是网络中神经元的个数; $x_i(t)$ 表示第 i 个神经元的状态变量, $f_i(\cdot), g(\cdot)$ 为激励函数; $\tau \geq 0$ 是表示时滞常量, $c_i(t), a_{ij}(t), b_{ij}(t)$ 是联接权值函数, $I_i(t)$ 表示第 i 个神经元的外部输入函数。

1 预备知识

模型(1)的初始条件为

$$x_i(t) = \phi_i(t), t \in [-\tau, 0], i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

其中 $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t))^T \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n), \phi_i(t) \in C([-\tau, 0], \mathbb{R})$, 这里 $C([-\tau, 0], \mathbb{R})$ 表示所有从 $[-\tau, 0]$ 到 \mathbb{R} 连续函数的全体。 $C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ 显然是 Banach 空间, 定义范数为 $\|\phi(t)\| = \sum_{i=1}^n |\phi_i(t)|$, 而 $|\phi_i(t)| = \sup_{t \in [-\tau, 0]} \{\phi_i(t)\}$ 。

定义 1^[2] $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 的一个 1-1 映射 (这里指单射), 若 Φ 是映上的, $\Phi \in C^0$, 且它的逆映射 $\Phi^{-1} \in C^0$, 则称 Φ 是 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 上的同胚。

定义 2^[18] 函数 $y(t): (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 的 α 分数阶积分定义为

$$I^\alpha y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s) ds,$$

其中 $t > 0, 0 < \alpha < 1, \Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$ 。

定义 3^[18] 函数 $y(t): (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 的 α 阶 Caputo 分数阶导数定义为

$$D^\alpha y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} y'(s) ds,$$

其中 $t > 0, 0 < \alpha < 1$ 。

定义 4^[16] 对于模型(1)的平衡点 x^* , 若对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $0 < \delta < \varepsilon$, 使得当初始值(2)满足

$\|\phi - x^*\| < \delta$ 时, 模型 (1) 的任意解 $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ 对 $\forall t \in [t_0, t_0 + T] = \omega$, 有 $\|x - x^*\| < \varepsilon$ 成立, 则称平衡点 x^* 关于 $\{t_0, \delta, \varepsilon, \omega\}$ 是有限时间稳定。

引理 1 [2] 若 $\Phi(x) \in C^0$, 且满足

- (i) $\Phi(x)$ 是 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 上的单射;
- (ii) 当 $\|x\| \rightarrow \infty$ 时, 有 $\|\Phi(x)\| \rightarrow \infty$.

则 $\Phi(x)$ 是 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 上的同胚。

引理 2 [17] 设 $x(t), y(t) \in C([0, \infty), \mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha < 1$, 则有

- (i) $D^\alpha I^\alpha x(t) = x(t)$;
- (ii) $I^\alpha D^\alpha x(t) = x(t) - x(0)$;
- (iii) $D^\alpha(ax(t) + by(t)) = aD^\alpha(x(t)) + bD^\alpha(y(t))$, $a, b \in \mathbb{R}$.

由 Jensen 不等式, 令 $f(y) = y^m$ ($m > 1$), 易得下列引理。

引理 3 若 y_1, y_2, \dots, y_n 是非负实数, 则对任意实数 $m > 1$, 有

$$\left(\frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} \right)^m \leq \frac{y_1^m + y_2^m + \dots + y_n^m}{n}.$$

等号成立当且仅当 $y_1 = y_2 = \dots = y_n$ 。

为了证明本文的结果, 先给出下列假设:

(A1) 激励函数 $f_i(x), g_i(x)$ 连续满足 $f_i(0) = 0, g_i(0) = 0$, 且存在常数 L_i, K_i , 使得

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leq L_i|x - y|, \quad |g_i(x) - g_i(y)| \leq K_i|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n;$$

(A2) $c_i(t) > 0, a_{ij}(t) \geq 0, b_{ij}(t) \geq 0$ 是连续函数。为了方便, 全文使用以下记号

$$c_i = \inf_{t \geq t_0} |c_i(t)|, \quad a_{ij} = \sup_{t \geq t_0} |a_{ij}(t)|, \quad b_{ij} = \sup_{t \geq t_0} |b_{ij}(t)|.$$

2 主要结果

先讨论模型 (1) 的平衡点的存在唯一性。定义映射

$$\Phi(x(t)) = -C(t)x(t) + A(t)f(x(t)) + B(t)g(x(t - \tau)) + I(t),$$

其中

$$C(t) = \text{diag}(c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t)), \quad x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T, \quad A(t) = (a_{ij}(t)),$$

$$B(t) = (b_{ij}(t)), \quad f(x(t)) = (f_1(x(t)), f_2(x(t)), \dots, f_n(x(t)))^T,$$

$$g(x(t - \tau)) = (g_1(x(t - \tau)), g_2(x(t - \tau)), \dots, g_n(x(t - \tau)))^T, \quad I(t) = (I_1(t), I_2(t), \dots, I_n(t))^T.$$

引理 4 假设 (A1) ~ (A2) 成立, 且满足

$$c_i - \sum_{j=1}^n L_i a_{ji} - \sum_{j=1}^n K_i b_{ji} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

则对每一外部输入 I , 映射 Φ 是 \mathbb{R}^n 上的同胚。

证明 显然 $\Phi(x) \in C^0$ 。下面证明映射 Φ 是单射, 只需证明对 $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, x \neq y$, 有 $\Phi(x) \neq \Phi(y)$,

$$\Phi_i(x_i) - \Phi_i(y_i) = -c_i(t)(x_i - y_i) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)[f_j(x_j) - f_j(y_j)] + \sum_{j=1}^n b_{ij}(t)[g_j(x_j) - g_j(y_j)].$$

令 $s_i = \text{sgn}(x_i - y_i)$, 用 s_i 乘上式两边有

$$s_i[\Phi_i(x_i) - \Phi_i(y_i)] = -c_i(t)s_i(x_i - y_i) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)s_i[f_j(x_j) - f_j(y_j)] + \sum_{j=1}^n b_{ij}(t)s_i[g_j(x_j) - g_j(y_j)].$$

由假设 (A1) ~ (A2) 有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n s_i [\Phi_i(x_i) - \Phi_i(y_i)] &= \sum_{i=1}^n \left\{ -c_i(t) s_i(x_i - y_i) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) s_i[f_j(x_j) - f_j(y_j)] + \sum_{j=1}^n b_{ij}(t) s_i[g_j(x_j) - g_j(y_j)] \right\} \\ &\leq -\sum_{i=1}^n \left[c_i |x_i - y_i| - \sum_{j=1}^n a_{ij} |f_j(x_j) - f_j(y_j)| - \sum_{j=1}^n b_{ij} |g_j(x_j) - g_j(y_j)| \right] \\ &\leq -\sum_{i=1}^n \left[c_i - \sum_{j=1}^n L_i a_{ij} - \sum_{j=1}^n K_i b_{ij} \right] |x_i - y_i|. \end{aligned}$$

由条件 (3), 至少存在一个 i , 使得 $c_i - \sum_{j=1}^n L_i a_{ij} - \sum_{j=1}^n K_i b_{ij} > 0$, 从而

$$-\sum_{i=1}^n \left[c_i - \sum_{j=1}^n L_i a_{ij} - \sum_{j=1}^n K_i b_{ij} \right] |x_i - y_i| < 0,$$

即 $\sum_{i=1}^n s_i [\Phi_i(x_i) - \Phi_i(y_i)] < 0$, 而 $\Phi_i(x_i) \neq \Phi_i(y_i)$, 故 $\Phi(x) \neq \Phi(y)$. 所以 Φ 是单射。

再证明当 $\|x\| \rightarrow \infty$ 时, 有 $\|\Phi(x)\| \rightarrow \infty$.

由于

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n s_i (\Phi_i(x_i) - \Phi_i(0)) &= \sum_{i=1}^n \left[-c_i(t) s_i x_i + \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) s_i f_j(x_j) + \sum_{j=1}^n b_{ij}(t) s_i g_j(x_j) \right] \\ &\leq -\sum_{i=1}^n \left[c_i |x_i| - \sum_{j=1}^n a_{ij} |f_j(x_j)| - \sum_{j=1}^n b_{ij} |g_j(x_j)| \right] \\ &\leq -\sum_{i=1}^n \left[c_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} L_i - \sum_{j=1}^n b_{ij} K_i \right] |x_i|, \end{aligned}$$

令 $\lambda = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ c_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} L_i - \sum_{j=1}^n b_{ij} K_i \right\}$, 由 (3) 式知 $\lambda > 0$, 有

$$\sum_{i=1}^n s_i (\Phi_i(x_i) - \Phi_i(0)) \leq -\sum_{i=1}^n \lambda |x_i| = -\lambda \|x\|,$$

从而

$$\|\Phi(x)\| + \|\Phi(0)\| = \left| \sum_{i=1}^n s_i \Phi_i(x_i) \right| + \left| \sum_{i=1}^n \Phi_i(0) \right| \geq \left| \sum_{i=1}^n s_i (\Phi_i(x_i) - \Phi_i(0)) \right| \geq \lambda \|x\|,$$

所以 $\|\Phi(x)\| \geq \lambda \|x\| - \|\Phi(0)\|$, 由此可得: 当 $\|x\| \rightarrow \infty$ 时, 有 $\|\Phi(x)\| \rightarrow \infty$.

综上, 由引理 1 可知 Φ 是 \mathbb{R}^n 上的同胚。

定理 1 假设 (A1) ~ (A2) 成立, 且满足条件 (3), 则模型 (1) 存在唯一的平衡点。

证明 若 x^* 是模型 (1) 的一个平衡点, 则有

$$D^\alpha(x_i^*) = -c_i(t)x_i^* + \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)f_j(x_j^*) + \sum_{j=1}^n b_{ij}(t)g_j(x_j^*) + I_i(t) = 0,$$

现考虑映射 $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n)^T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, 其中

$$\Phi(x_i(t)) = -c_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij}(t)g_j(x_j(t - \tau)) + I_i(t).$$

由引理 4 知 Φ 是 \mathbb{R}^n 上的同胚, 因此方程 (1) 存在唯一的平衡点 $x^* \in \mathbb{R}^n$, 使得 $\Phi(x^*) = 0$. 证毕。

定理 2 假设 (A1) ~ (A2) 成立, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 δ , 有 $0 < \delta < \varepsilon$, 且满足以下条件

$$\delta \left(\frac{2^{v-1}(\Lambda e^{(\Lambda+v)t} + v)}{v + \Lambda} \right)^{v-1} < \varepsilon, \quad t \in \Omega, \tag{4}$$

其中 $\Lambda = 2^{v-1} \left(\frac{\lambda^u \Gamma(u\alpha - u + 1)}{\Gamma(\alpha)^u u^{\alpha-u+1}} \right)^{\frac{v}{u}}$, $\lambda = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ c_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} L_i - \sum_{j=1}^n b_{ij} K_i \right\} > 0$, $u > 1, v > 1$, 则模型 (1) 的唯一平衡点 x^* 关于 $\{t_0, \delta, \varepsilon, \Omega\}$ 是有限时间稳定。

证明 若 x^* 是模型 (1) 的平衡点, 则显然有

$$D^\alpha x_i^* = -c_i(t)x_i^* + \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)f_j(x_j^*) + \sum_{j=1}^n b_{ij}(t)g_j(x_j^*) + I_i(t).$$

设 $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ 是模型 (1) 的满足初始条件 (2) 的任意解, 从而

$$\begin{aligned} D^\alpha(x_i(t) - x_i^*) &= D^\alpha x_i(t) - D^\alpha x_i^* \\ &= -c_i(t)[x_i(t) - x_i^*] + \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)[f_j(x_j(t)) - f_j(x_j^*)] + \sum_{j=1}^n b_{ij}(t)[g_j(x_j(t - \tau)) - g_j(x_j^*)], \end{aligned}$$

由引理 2, 得

$$\begin{aligned} x_i(t) - x_i^* &= D^\alpha \left\{ -c_i(t)[x_i(t) - x_i^*] + \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)[f_j(x_j(t)) - f_j(x_j^*)] + \sum_{j=1}^n b_{ij}(t)[g_j(x_j(t - \tau)) - g_j(x_j^*)] \right\} \\ &= x_i(0) - x_i^* + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left\{ -c_i(s)(x_i(s) - x_i^*) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(s)(f_j(x_j(s)) - f_j(x_j^*)) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^n b_{ij}(s)[g_j(x_j(s - \tau)) - g_j(x_j^*)] \right\} ds, \end{aligned}$$

用 s_i 乘上式两边有

$$\begin{aligned} s_i(x_i(t) - x_i^*) &= s_i(x_i(0) - x_i^*) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left\{ -c_i(s)s_i(x_i(s) - x_i^*) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(s)s_i(f_j(x_j(s)) - f_j(x_j^*)) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^n b_{ij}(s)s_i[g_j(x_j(s - \tau)) - g_j(x_j^*)] \right\} ds. \end{aligned}$$

由假设 (A1) ~ (A2), 可得

$$\begin{aligned} \|x(t) - x^*\| &= \sum_{i=1}^n |x_i(t) - x_i^*| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i(0) - x_i^*| - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^n \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left\{ c_i |x_i(s) - x_i^*| - \sum_{j=1}^n a_{ij} |f_j(x_j(s)) - f_j(x_j^*)| \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^n b_{ij}(s) |g_j(x_j(s)) - g_j(x_j^*)| \right\} ds \\ &\leq \|x(0) - x^*\| - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^n \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left(c_i - \sum_{j=1}^n L_i a_{ji} - \sum_{j=1}^n K_i b_{ji} \right) |x_i(s) - x_i^*| ds \\ &\leq \|x(0) - x^*\| - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \lambda \sum_{i=1}^n |x_i(s) - x_i^*| ds \\ &= \|x(0) - x^*\| - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \lambda e^s \right] \cdot [e^{-s} \|x(s) - x^*\|] ds \\ &\leq \|x(0) - x^*\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \lambda e^s \right] \cdot [e^{-s} \|x(s) - x^*\|] ds. \end{aligned}$$

令 $u = 1 + \alpha, v = 1 + \frac{1}{\alpha}$, 易知 $u > 1, v > 1$, 且 $u + v = 1$ 。由 Höder 不等式, 可得

$$\|x(t) - x^*\| \leq \|x(0) - x^*\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^t (t-s)^{u\alpha-u} e^{us} \lambda^u ds \right]^{\frac{1}{u}} \cdot \left[\int_0^t e^{-vs} \|x(s) - x^*\|^v ds \right]^{\frac{1}{v}},$$

而且

$$\int_0^t (t-s)^{u\alpha-u} e^{us} \lambda^u ds = e^{ut} \lambda^u \int_0^t \gamma^{u\alpha-u} e^{u\gamma} d\gamma \leq \frac{\lambda^u e^{ut}}{u^{u\alpha-u+1}} \Gamma(u\alpha - u + 1),$$

所以

$$\|x(t) - x^*\| \leq \|x(0) - x^*\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{\lambda^u e^{ut}}{u^{u\alpha-u+1}} \Gamma(u\alpha - u + 1) \right]^{\frac{1}{u}} \cdot \left[\int_0^t e^{-vs} \|x(s) - x^*\|^v ds \right]^{\frac{1}{v}}.$$

由引理3, 可得

$$\|x(t) - x^*\|^v \leq 2^{v-1} \|x(0) - x^*\|^v + 2^{v-1} \left[\frac{\lambda^u e^{ut} \Gamma(u\alpha - u + 1)}{u^{\alpha-u+1} \Gamma(\alpha)^u} \right]^{\frac{v}{u}} \cdot \int_0^t e^{-vs} \|x(s) - x^*\|^v ds,$$

因此有

$$\|x(t) - x^*\|^v e^{-vt} \leq 2^{v-1} e^{-vt} \|x(0) - x^*\|^v + \Lambda \int_0^t e^{-vs} \|x(s) - x^*\|^v ds.$$

由 Gronwall 不等式, 可得

$$\begin{aligned} \|x(t) - x^*\|^v e^{-vt} &\leq 2^{v-1} e^{-vt} \|x(0) - x^*\|^v + \int_0^t 2^{v-1} \Lambda e^{-vs} \|x(0) - x^*\|^v e^{\Lambda(t-s)} ds \\ &\leq \frac{2^{v-1} (\Lambda e^{\Lambda t} + v e^{-vt})}{v + \Lambda} \|x(0) - x^*\|^v, \end{aligned}$$

即

$$\|x(t) - x^*\| \leq \left[\frac{2^{v-1} (\Lambda e^{(v+\Lambda)t} + v)}{v + \Lambda} \right]^{\frac{1}{v}} \|x(0) - x^*\|.$$

从而当 $\|x(0) - x^*\| < \delta$, 有 $\|x(t) - x^*\| < \varepsilon$, 故模型 (1) 的唯一平衡点 x^* 关于 $\{t_0, \delta, \varepsilon, \omega\}$ 是有限时间稳定的。证毕。

3 实例

例1 考虑如下两个神经元的分数阶RNNs模型

$$D^\alpha x_i(t) = -c_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^2 a_{ij}(t)f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^2 b_{ij}(t)g_j(x_j(t-\tau)) + I_i(t), \quad (5)$$

其中 $f_i(x_i(t)) = g(x_i(t)) = \tanh(t)$, $i = 1, 2$ 。 $I(t) = (0.5 \quad 0.6)^T$, $C(t) = (1.58 \quad 1.62)^T$, $\tau = 0.5$,

$$A(t) = (a_{ij}(t)) = \begin{pmatrix} 0.45 \sin t & -0.35 \cos t \\ 0.38 \sin t & 0.44 \cos t \end{pmatrix}, \quad B(t) = (b_{ij}(t)) = \begin{pmatrix} 0.24 \sin t & -0.3 \cos t \\ 0.23 \cos t & 0.21 \sin t \end{pmatrix}.$$

不难得出激励函数 $f_i(x_i(t))$, $g_i(x_i(t))$ 满足条件 (A1), 且有 $L_i = K_i = 1$, ($i = 1, 2$)。

当 $\alpha = 0.86$ 时, 易求得 $u = 1.86$, $v = 2.2628$,

$$c_1 - L_1 \sum_{j=1}^2 a_{j1} - K_1 \sum_{j=1}^2 b_{j1} = 0.28 > 0, \quad c_2 - L_2 \sum_{j=1}^2 a_{j2} - K_2 \sum_{j=1}^2 b_{j2} = 0.32 > 0.$$

由定理1可知, 模型 (1) 有唯一的平衡点 x^* 。易知 $\lambda = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ c_i - \sum_{j=1}^n a_{ji} L_i - \sum_{j=1}^n b_{ji} K_i \right\} = 0.28$, 所以

$$\begin{aligned} \Lambda &= 2^{v-1} \left(\frac{\lambda^u \Gamma(u\alpha - u + 1)}{\Gamma(\alpha)^u u^{\alpha-u+1}} \right)^{\frac{v}{u}} = 2^{1.2628} \times \left(\frac{\Gamma(0.7396)}{1.86^{0.7396}} \right)^{1.2628} \times \left(\frac{0.28}{\Gamma(0.86)} \right)^{2.2628} \\ &= 2.3996 \times 0.78325 \times 0.0449 = 0.0844. \end{aligned}$$

由 $\delta \left(\frac{2^{v-1} (\Lambda e^{(\Lambda+v)t} + v)}{v + \Lambda} \right)^{\frac{1}{v}} < \varepsilon$, 可得到估计式 $t < \frac{1}{v + \Lambda} \left[\ln \left(\left(\frac{\varepsilon}{\delta} \right)^v \cdot \frac{v + \Lambda}{2^{v-1}} - v \right) - \ln \Lambda \right]$ 。

如若取 $\varepsilon = 0.195$, $\delta = 0.0785$, 可得时间 t 的估计值为 1.772, 则由定理2可知, 模型 (5) 的唯一平衡点 x^* 关于 $\{t_0, \delta, \varepsilon, \omega\} = \{0, 0.0785, 0.195, 1.772\}$ 是有限时间稳定。

若取 $\varepsilon = 0.025$, $\delta = 0.0068$, 可得时间 t 的估计值为 2.244, 则由定理2可知, 模型 (5) 的唯一平衡点 x^* 关于 $\{t_0, \delta, \varepsilon, \omega\} = \{0, 0.0068, 0.025, 2.244\}$ 是有限时间稳定。

参考文献:

- [1] HOPFIELD J J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities [C]. Proceeding of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1982: 2554-2558.

- [2] SUN C Y, ZHANG K J, FEI S M, et al. On exponential stability of delayed neural networks with a general class of activation functions [J]. *Physics Letters A*, 2002, 298: 122-132.
- [3] 陈钢,王占山. 连续时间递归神经网络的稳定性分析[J]. *沈阳理工大学学报*, 2007, 26(2): 1-4.
CHEN G, WANG Z S. An analysis on the stability of continuous-time recursive neural networks [J]. *Transactions of Shenyang Ligong University*, 2007, 26(2): 1-4.
- [4] 李冠军,徐进. 时滞递归神经网络的全局稳定性的新判据[J]. *华中师范大学学报(自然科学版)*, 2009, 43(3): 384-387.
LI G J, XU J. New criteria for global stability of recurrent neural networks with delays [J]. *Journal of Huazhong Normal University(Nat Sci)*, 2009, 43(3): 384-387.
- [5] 张建海,周文晖,孔万增. 时滞递归神经网络鲁棒稳定性分析的统一方法[J]. *华中科技大学学报(自然科学版)*, 2009, 37(6): 28-31.
ZHANG J H, ZHOU W H, KONG W Z. Unified approach for robust stability analysis of delayed recurrent neural networks [J]. *Journal Huazhong Univ of Sci & Tech (Natural Science Edition)*, 2009, 37(6): 28-31.
- [6] XIANG H J, CAO J D. Almost periodic solutions of recurrent neural networks with continuously distributed delays [J]. *Nonlinear Analysis*, 2009, 71: 6097-6108.
- [7] 张际雄,李小柳,周伟松. 对一类时变时滞递归神经网络的全局渐进稳定性充分性条件的研究[J]. *绵阳师范学院学报*, 2014, 33(8): 28-33.
ZHANG J X, LI X L, ZHOU W S. On global asymptotical stability analysis of recurrent neural networks with time-varying delays [J]. *Journal of Mianyang Normal University*, 2014, 33(8): 28-33.
- [8] PAN Q F, ZHANG Z F. Exponential stability of a class of stochastic delay recurrent neural network [J]. *数学杂志*, 2014, 34(3): 487-496.
- [9] 邢广霞,高岩波. 带有时变时滞的递归神经网络的稳定性分析[J]. *南通大学学报(自然科学版)*, 2015, 14(3): 12-20.
XING G X, GAO Y B. Stability analysis for recurrent neural networks with time-varying delay [J]. *Journal of Nantong University(Natural Science Edition)*, 2015, 14(3): 12-20.
- [10] 赵宁,周立群. 一类具多比例时滞递归神经网络的全局指数稳定性[J]. *工程数学学报*, 2016, 33(5): 450-462.
ZHAO N, ZHOU L Q. Global exponential stability of a class of recurrent neural networks with multi-proportional delays [J]. *Chinese Journal of Engineering Mathematics*, 2016, 33(5): 450-462.
- [11] 邢琳,周立群. 一类具比例时滞递归神经网络的全局稳定性及仿真[J]. *天津师范大学学报(自然科学版)*, 2019, 39(4): 13-17+27.
XING L, ZHOU L Q. Global stability and simulation of a class of recurrent neural networks with proportional delays [J]. *Journal of Tianjin Normal University(Natural Science Edition)*, 2019, 39(4): 13-17+27.
- [12] BAO G, CHEN Y Y, WEN S Y, et al. Stability analysis for memristive recurrent neural network and its application to associative memory [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2017, 43(12): 2244-2252.
- [13] 刘凤秋,邱敏. 一类忆阻递归神经网络的全局指数稳定性[J]. *黑龙江大学自然科学学报*, 2018, 35(4): 407-412.
LIU F Q, QIU M. Global exponential stability of a class of memristor-based recurrent neural networks [J]. *Journal of Natural Science of Heilongjiang University*, 2018, 35(4): 407-412.
- [14] ANASTASIO T J. Non-uniformity in the linear network model of the oculomotor integrator produces approximately fractional-order dynamics and more realistic neuron behavior [J]. *CyberneticsBiological*, 1998, 79(5): 377-391.
- [15] BORROOMAND A, MENHAJ M B. Fractional-order Hopfield neural networks [C]// *Proceedings of International Conference on Neural Information Processing*, 2008: 883-890.
- [16] 哈金才,杨洪福,张启敏. 分数阶模糊时滞神经网络模型解的存在唯一性和有限时间稳定性[J]. *数学杂志*, 2016, 36(6): 1261-1272.
HA J C, YANG H F, ZHANG Q M. Existence, Uniqueness and finite time stability of fractional order fuzzy neural networks with delay [J]. *Journal of Math*, 2016, 36(6): 1261-1272.
- [17] 张硕. 基于李雅普诺夫方法的分数阶神经网络动力学分析及控制[D]. 北京:北京交通大学,2017.
ZHANG S. Dynamical analysis and control of fractional-order neural networks based on Lyapunov method [D]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2017.
- [18] 王金华,赵育林,向红军. 分数微分方程 m 点边值问题解的存在性与唯一性[J]. *中山大学学报(自然科学版)*, 2011, 50(1): 4-8.
WANG J H, ZHAO Y L, XIANG H J. Existence and uniqueness for m -point boundary value problem of fractional differential equation [J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni*, 2011, 50(1): 4-8.
- [19] 王金华,向红军,赵育林. 一类非线性分数阶差分方程边值问题解的存在性及Ulam稳定性[J]. *中山大学学报(自然科学版)*, 2016, 55(2): 1-6+13.
WANG J H, XIANG H J, ZHAO Y L. Existence and Ulam stability of solutions for a boundary value problem of nonlinear fractional difference equation [J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni*, 2016, 55(2): 1-6+13.